Questions de cours

TD 1 (Normes et topologie).

(a) Donner la définition de la norme sur un espace vectoriel et d'un espace vectoriel normé.
(b) Quand dit-on que deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes ?
(c) Donner la définition d'une distance et d'un espace métrique.
(d) Définir la distance induite par une norme.
(e) Définir boule fermée et boule ouverte dans un espace vectoriel normé.
(f) Qu'appelle-t-on partie bornée d'un espace vectoriel normé ?
(g) Définir la limite d'une suite.
(h) Qu'appelle-t-on sous-suite (ou suite extraite) ?
(i) Qu'appelle-t-on valeurs d'adhérence d'une suite ?
(j) Donner la définition d'un ouvert et d'un fermé d'un espace métrique.
(k) Qu'appelle-t-on intérieur, adhérence et frontière d'une partie d'un espace métrique ?
(l) Quand dit-on qu'une partie d'un espace métrique est dense ?
(m) Donner la définition d'un voisinage (d'un point) dans un espace métrique.
(n) Donner un critère séquentiel pour vérifier que une partie d'un espace métrique est fermée.
(o) Quel est le lien entre l'adhérence d'une partie d'un espace métrique et les valeurs d'adhérences des suites ?

TD 2 (Continuité et normes subordonnées).

(a) Donner la définition de fonction continue en un point.
(b) Donner la définition de fonction continue.
(c) Soit $f : E \to F$ une application. Rappeler la définition de image directe d'une partie $A \subseteq E$ et d'image réciproque de $B \subseteq F$. Utiliser ces notions pour décrire la continuité de f si E et F sont munis de distances d_E et d_F respectivement.
(d) Donner le critère séquentiel de continuité en un point.
(e) Donner la définition de fonction uniformément continue.
(f) Donner le critère séquentiel d'uniforme continuité.
(g) Donner la définition de fonction lipschitzienne.
(h) Donner la définition de la constante de Lipschitz d'une fonction (lipschitzienne).
(i) Quelle est la relation entre fonctions continues, uniformément continues, et lipschitziennes ?
(j) Donner la définition de norme subordonnée.
(k) Est-ce que toute application linéaire $L : V \to W$ entre espaces vectoriels normés est continue ? Et si la dimension de V est finie ?
(l) Sous quelle condition une application linéaire $L : V \to W$ entre espaces vectoriels normés est continue / uniformément continue / lipschitzienne ?

TD 3 (Suites de fonctions et espaces compacts).

(a) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : (E, d_E) \to (F, d_F)$ entre espaces métriques. Que veut dire : la suite (f_n) converge ponctuellement vers $f_\infty : E \to F$?
(b) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : (E, d_E) \to (F, d_F)$ entre espaces métriques. Que veut dire : la suite (f_n) converge uniformément vers $f_\infty : E \to F$?
(c) Est-ce que la convergence simple (ou ponctuelle) implique la convergence uniforme ? Est-ce que la convergence uniforme entraine la convergence simple ?
(d) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues. Supposons que f_n converge ponctuellement vers une fonction f. Est-ce que f est forcément continue ? Et si la convergence était uniforme ?

(e) Soit E un espace métrique et A une partie de E. Donner la définition de recouvrement ouvert de A.

(f) Soit E un espace métrique et A une partie de E. Donner la définition de sous-recouvrement d'un recouvrement de A.

(g) Soit E un espace métrique. Énoncer la propriété de Borel-Lebesgue, satisfaite par un compact K de E.

(h) Soit E un espace métrique. Quelle propriété a toute suite à valeurs dans un compact de E ?

(i) Soit E un espace métrique. Qu'est-ce qu'une suite décroissante de parties de E ? Quelle propriété vaut pour ces objets si E est compact ?

(j) Soit $V = \mathbb{R}^n$. Donner une caractérisation des compacts de V.

(k) Quelle est la relation entre les fonctions continues et les fonctions uniformément continues ? Et si f est définie à valeurs dans un ensemble compact ?

(l) Énoncer le théorème de Heine.

TD 4 (Espaces complets).

(a) Soit (X, d_X) un espace métrique. Qu'est-ce qu'une suite de Cauchy dans (X, d_X) ?

(b) Est-ce que toute suite de Cauchy est convergente ? Est-ce que toute suite convergente est de Cauchy ?

(c) Donner la définition d'espace métrique complet.

(d) Quelle est la relation entre espaces métriques complets et compacts ?

(e) Qu'est-ce qu'un espace de Banach ?

(f) Soit (X, d_X) un espace métrique et $f : (X, d_X) \to (X, d_X)$ une application. Quand dit-on que f est une *contraction* ?

(g) Quelle est la relation entre contractions et fonctions lipschitziennes ?

(h) Énoncer le théorème du point fixe de Banach.

TD 5 (Différentielle).

(a) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, et $p_0 \in \Omega$. Que veut dire : f est différentiable en p_0 ? Définir le gradient $\nabla f(p_0)$ de f en p_0.

(b) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction, et $p_0 \in \Omega$. Que veut dire : f est différentiable en p_0 ? Définir la différentielle $df(p_0)$ de f en p_0.

(c) Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces vectoriels normés. Donner la définition de fonction différentiable $f : V \to W$ en $p_0 \in V$, et de différentielle de f en p_0.

(d) Est-ce que toute fonction différentiable est continue ? Est-ce que toute fonction continue est différentiable ?

(e) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction, $p \in \mathbb{R}^n$ un point et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur non nul. Donner la définition de dérivée partielle de f en p le long des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, et de dérivée directionnelle de f en p le long de v.

(f) Quelle relation y a-t-il entre les fonctions différentiables et les dérivées partielles/directionnelles ?

(g) Qu'est-ce qu'une application de classe $\mathcal{C}^1$?

(h) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $p \in \mathbb{R}^n$. Qu'est-ce que la matrice jacobienne de f en p ?

(i) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $p \in \mathbb{R}^n$. Donner un système d'équations qui décrit l'hyperplan tangent au graphe de f en $(p, f(p))$.

(j) Énoncer le théorème des accroissements finis pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$, avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

(k) Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

TD 6 (Différentielle seconde et extrema).
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Donner la définition des dérivées partielles d'ordre p de f, pour $p \in \mathbb{N}^*$.

(b) Donner la définition de la matrice hessienne de f.

(c) Énoncer le théorème de Schwarz.

(d) Sous quelles conditions sur f la matrice hessienne de f est-elle symétrique ?

(e) Donner la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

(f) Donner la définition d'extremum local pour f.

(g) Donner la définition d'extremum global pour f.

(h) Quel est le lien entre les extrema et les différentielles première et seconde d'une fonction ?

(i) Soit M une matrice symétrique. Que veut dire "M est définie positive" ? Et "M est définie négative" ?

(j) Énoncer la formule de Taylor pour f en $x_0 \in \Omega$ à l'ordre 0 et 1 avec reste intégral (de Laplace).

(k) Énoncer la formule de Taylor-Young pour f en $x_0 \in \Omega$ à l'ordre 1 et 2 avec reste de Peano.

(l) Décrire la regle du calcul de la différentielle d'une composition de fonctions différentiables.

TD 7 (**Inversion locale, fonctions implicites et extrema liés**).

(a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie au voisinage de $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Que veut dire "f est un difféomorphisme local au point p_0" ?

(b) Donner la définition de difféomorphisme (global).

(c) Énoncer le théorème d'inversion locale.

(d) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme local au point $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit g la réciproque de f au voisinage de p_0. Exprimer la valeur de dg en $f(p_0)$ en foncton de df.

(e) Énoncer le théorème des fonctions implicites.

(f) Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, et $c \in \mathbb{R}^m$. Donner des conditions pour l'existence d'une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 telle que le lieu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid f(x, y) = c\}$ soit donné par le graphe de g localement en p_0. Exprimer dg_{x_0} en fonction de df_{p_0}.

(g) Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $c \in \mathbb{R}^m$. Soit $S = \{p \in \mathbb{R}^{n+m} \mid f(p) = c\}$. Que veut dire : "$p_0$ est un point régulier de S" ?

(h) Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $c \in \mathbb{R}^m$. Soit $S = \{p \in \mathbb{R}^{n+m} \mid f(p) = c\}$ et $p_0 \in S$ un point régulier de S. Donner un système d'équations qui définit l'hyperplan tangent de S en p_0.

(i) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie au voisinage $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ d'un point x_0. Sous quelle condition l'ensemble $f(\Omega)$ admet (localement) un hyperplan tangent H (de dimension n) en $f(x_0)$? Donner une paramétrisation de H (c'est-à-dire, trouver un système de générateurs pour l'hyperplan affine H).

(j) Donner la définition d'extrema liés.

(k) Énoncer le théorème du multiplicateur de Lagrange.

(l) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $S = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$, et considerons l'application $f|_S$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in S$. Est-ce que x_0 est forcement un extremum local de $f|_S$? Et si x_0 est un point régulier de S ?